حل تشریحی سوالات

ریاضیـــات

کنکور تجربی ۱۴۰۰

دکتر بهزاد خداکرمی

مدرس دوره تضمینی ریاضیات کنکور تجربی ۱۴۰۱

www.khodakarami.com

۱- فرض کنید $a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$ مقدار $\left(a^2+b^2-2ab\right)^2\left(a^2+b^2+2ab\right)^2$، کدام است؟

۱) $4\left(2+\sqrt{3}\right)$ ۲) $4\left(2-\sqrt{3}\right)$ ۳) $16\left(2+\sqrt{3}\right)$ ۴) $16\left(2-\sqrt{3}\right)$

پاسخ :

گزینه ۴

با استفاده از اتحادهای جبری داریم:

$$\left(a^2+b^2-2ab\right)^2\left(a^2+b^2+2ab\right)=\left(\left(a-b\right)^2\right)^2\left(\left(a+b\right)^2\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^4$$

$$=\left(\sqrt{\sqrt{6}-2}-\sqrt{\sqrt{6}+2}\right)^4=\left(\left(\sqrt{6}-2\right)+\left(\sqrt{6}+2\right)-2\sqrt{6-4}\right)^2$$

$$=\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)^2=24+8-8\sqrt{12}=16\left(2-\sqrt{3}\right)$$

۲- فرض کنید x_1 و x_2 جواب های معادله $\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=2\sqrt[3]{x}$، باشند. مقدار x_1+x_2، کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ :

گزینه ۴

طرفین را به $\sqrt[3]{x^2}$ ضرب می کنیم:

$$\left(\sqrt[3]{x^4}+1+\sqrt[3]{x^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=2x$$

فرض : $\sqrt[3]{x^2}=t$

$$\left(\sqrt[3]{x^4}+1+\sqrt[3]{x^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=\left(t^2+1+t\right)\left(t-1\right)=t^3-1^3=x^2-1$$

$$x^2-1=2x\quad\Rightarrow\quad x^2-2x-1=0$$

بنابراین: $x_1+x_2=2$

۳- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه های معادله $x=5-x^2$ باشند. $\frac{1}{\left(x_2+1\right)^3}$ و $\frac{1}{\left(x_1+1\right)^3}$، ریشه های کدام معادله هستند؟

۱) $125x^2+16x=1$ ۲) $125x^2=16x+1$

۳) $125x^2=12x+1$ ۴) $125x^2+12x=1$

پاسخ :

گزینه ۱

روش اول: چیزی که از ما خواسته است در واقع به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x_1 \to x_1+1 \to \dfrac{1}{x_1+1} \to \dfrac{1}{(x_1+1)^3} \\ x_2 \to x_2+1 \to \dfrac{1}{x_2+1} \to \dfrac{1}{(x_2+1)^3} \end{cases}$$

$$x^2+x-5=0 \xrightarrow{x\to x-1} (x-1)^2+(x-1)-5=0 \Rightarrow x^2-x-5=0$$

ریشه های این معادله x_1+1 و x_2+1 هستند.

$$x^2+x-5=0 \xrightarrow{x\to \frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-5=0 \Rightarrow 5x^2-x-1=0$$

ریشه های این معادله $\frac{1}{x_1+1}$ و $\frac{1}{x_2+1}$ هستند.

برای تشکیل معادله ای که ریشه هایش $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ هستند مجموع (S) و حاصلضرب (P) ریشه های مربوطه را تعیین می کنیم. با فرض $x'_1=\frac{1}{x_1+1}$ و $x'_2=\frac{1}{x_2+1}$ داریم:

$$P=x_1'^3x_2'^3=P'^3=\left(-\frac{1}{5}\right)^3=-\frac{1}{125}$$

$$S=x_1'^3+x_2'^3=S'^3-3S'P'$$

$$=\left(-\frac{1}{5}\right)^3-3\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{16}{125}$$

بنابراین: $x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0$

روش دوم:

$$x^2+x-5=0$$

$$S'=-1\ ,\ P'=-5$$

$$x_1+x_2=-1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1+1=-x_2 \\ x_2+1=-x_1 \end{cases}$$

$$S=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}=-\frac{1}{x_2^3}-\frac{1}{x_1^3}=-\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}=-\frac{S'^3-3S'P'}{P'^3}=\frac{(-1)^3-3\times(-1)(-5)}{(-5)^3}=-\frac{16}{125}$$

با دقت در گزینه ها فقط در گزینه ۱ مجموع ریشه ها $-\frac{16}{125}$ است.

۴- اگر $f(x)=16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$، کدام است؟

۱) $\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$ ۲) $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$ ۳) $\frac{6+\sqrt{3}}{16}$ ۴) $\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$

پاسخ:

گزینه ۴

روش اول: جاگذاری $\frac{\pi}{۳۶}$ در تابع

$$f\left(\frac{\pi}{۳۶}\right)=۱۶\cos^{۲}\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)\cos^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}\right)\cos^{۲}\left(\frac{\pi}{۳}\right)\cos^{۲}\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)$$

$$\cos^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{۳}{۴}\ ,\ \ \cos^{۲}\left(\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{۱}{۴}\ ,\ \ \cos^{۲}\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)=\frac{۱}{۴}$$

$$\cos^{۲}\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)=\frac{۱+\cos\left(\frac{\pi}{۶}\right)}{۲}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}$$

با جاگذاری:

$$F\left(\frac{\pi}{۳۶}\right)=۱۶\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

روش دوم:

تابع را به $\sin^{۲}۳x$ ضرب و تقسیم می کنیم:

$$f(x)=\frac{۱۶\cos^{۲}(۳x)\sin^{۲}(۳x)\cos^{۲}(۶x)\cos^{۲}(۱۲x)\cos^{۲}(۲۴x)}{\sin^{۲}(۳x)}$$

$$۴\cos^{۲}(۳x)\sin^{۲}(۳x)=\sin^{۲}(۶x)$$

$$۴\cos^{۲}(۶x)\sin^{۲}(۶x)=\sin^{۲}(۱۲x)$$

$$۴\cos^{۲}(۱۲x)\sin^{۲}(۱۲x)=\sin^{۲}(۲۴x)$$

$$۴\cos^{۲}(۲۴x)\sin^{۲}(۲۴x)=\sin^{۲}(۴۸x)$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{\frac{۱}{۱۶}\sin^{۲}(۴۸x)}{\sin^{۲}(۳x)}\ \Rightarrow\ f\left(\frac{\pi}{۳۶}\right)=\frac{۱}{۱۶}\frac{\sin^{۲}\left(\frac{۴\pi}{۳}\right)}{\sin^{۲}\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)}$$

$$\sin^{۲}\left(\frac{۴\pi}{۳}\right)=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}=\frac{۳}{۴}$$

$$\sin^{۲}\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)=\frac{۱-\cos\left(\frac{\pi}{۶}\right)}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}$$

$$f\left(\frac{\pi}{۳۶}\right)=\frac{۱}{۱۶}\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}}=\frac{۳}{۱۶\left(۲-\sqrt{۳}\right)}=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

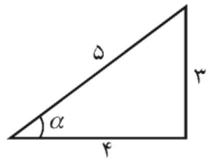
۵- اگر زاویه α ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha)=\frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $\frac{\cos\left(۲\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(۲\alpha)}$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{۹۶}{۱۷۵}$ ۲) $\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$ ۳) $\frac{۹۶}{۱۷۵}$ ۴) $-\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

پاسخ :

گزینه ۲

با توجه به تعریف $\tan(\alpha)$ داریم:



$$\sin(\alpha)=-\frac{3}{5}\qquad \cos(\alpha)=-\frac{4}{5}$$

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25}$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$$

$$\Rightarrow\ \cot(2\alpha)=\frac{7}{24}$$

$$\frac{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(2\alpha)}=\frac{\sin(2\alpha)-\cos(\alpha)}{\cot(2\alpha)}=\frac{\frac{24}{25}+\frac{4}{5}}{\frac{7}{24}}=\frac{1056}{175}$$

۶- تعداد جواب های معادله مثلثاتی $\cos^2(x)-\sin^2(x)\cos(3x)=1$ ، در فاصله $[0,2\pi]$ ، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ :

گزینه ۳

$$-\sin^2(x)\cos(3x)=1-\cos^2(x)$$

$$-\sin^2(x)\cos(3x)-\sin^2(x)=0\ \Rightarrow\ \sin^2(x)\left[\cos(3x)+1\right]=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin^2(x)=0\ \Rightarrow\ \sin(x)=0\ \Rightarrow\ x=k\pi\ \Rightarrow x=0,\pi,2\pi\\ \cos(3x)+1=0\ \Rightarrow\ \cos(3x)=-1\ \Rightarrow\ 3x=(2k+1)\pi\ \Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{3}\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}\end{cases}$$

ریشه $x=\pi$ تکراری است بنابراین ۵ ریشه وجود دارد.

۷- دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{\log_4\left(x^2-x-2\right)}{\sqrt{x^2-1}+1}$ ، کدام است؟

۱) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ ۲) $(-1,2)$

۳) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ ۴) $(-2,1)$

پاسخ:

گزینه ۱

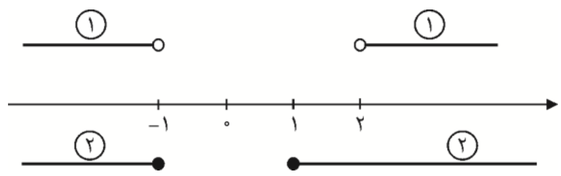
روش تشریحی:

$$x^2-x-2>0 \qquad (1)$$
$$x^2-1\ge 0 \qquad (2)$$

دامنه، اشتراک محدوده های فوق است.

$x^2-x-2=0 \ \Rightarrow\ x=-1,2$

$x^2-1\ge 0 \ \Rightarrow\ x=\pm 1$



اشتراک در محدوده گزینه ۱ خواهد بود.

روش تستی:

گزینه های ۲ و ۴ نادرست $\Rightarrow$ جزو دامنه نیست. $\Rightarrow$ در مخرج $\sqrt{-1}$ ظاهر می شود : $x=0$

گزینه ۳ نادرست $\Rightarrow$ جزو دامنه نیست. $\Rightarrow$ $x=1/5:\ x^2-x-2=1/5^2-1/5-2<0$

در تعیین دامنه:

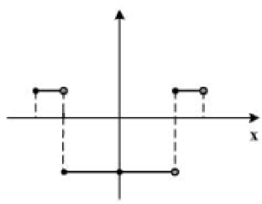
۱) زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد.

۲) عبارتی که از آن لگاریتم گرفته می شود باید مثبت باشد.

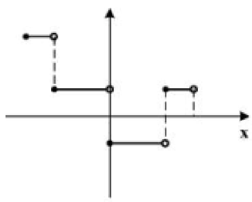
۳) مخرج کسر نباید صفر شود

۸- نمودار تابع $y=2\left|[3x]\right|-1$ به ازای $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$، کدام است؟

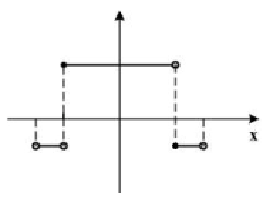
۱)



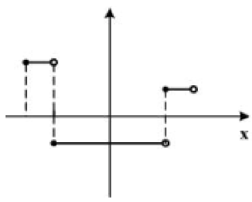
۲)



۳)



۴)



پاسخ :

گزینه ۲

روش اول:

با توجه به وجود $3x$ چند بازه به صورت زیر در نظر می گیریم:

گزینه ۳ نادرست است $\quad y=2\times 0-1=-1 \quad : \quad 0\le x<\frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\frac{۱}{۳} \le x < \frac{۱}{۲} \quad : \quad y = ۲\times ۱ - ۱ = ۱$$

$$-\frac{۱}{۳} \le x < ۰ \quad : \quad y = ۲\times ۱ - ۱ = ۱ \Rightarrow$$ **گزینه ۲ صحیح است**

روش دوم:

$$x \to ۰^+ \Rightarrow y = ۲\times ۰ - ۱ = -۱$$

$$x \to ۰^- \Rightarrow y = ۲\times ۱ - ۱ = ۱$$

واضح است که گزینه ۲ صحیح است.

۹- فاصله نقطه تلاقی منحنی های $۲y = x^۲$ و $x = \sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

پاسخ:

گزینه ۴

$$۲y = x^۲ \Rightarrow y = \frac{x^۲}{۲}$$

$$x = \sqrt{\frac{x^۲}{۲}+۳} - \sqrt{\frac{x^۲}{۲}-۳}$$

$$x^۲ = \left(\frac{x^۲}{۲}+۳\right) + \left(\frac{x^۲}{۲}-۳\right) - ۲\sqrt{\left(\frac{x^۲}{۲}+۳\right)\left(\frac{x^۲}{۲}-۳\right)}$$

$$۰ = -۲\sqrt{\left(\frac{x^۲}{۲}+۳\right)\left(\frac{x^۲}{۲}-۳\right)}$$

$\frac{x^۲}{۲}+۳$ صفر نمی شود.

$$\frac{x^۲}{۲} - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۶ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۶}$$

قابل قبول نیست.

$$۲y = ۶ \Rightarrow y = ۳$$

فاصله نقطه $\left(\sqrt{۶}, ۳\right)$ تا مبدا مختصات:

$$d = \sqrt{۶+۹} = \sqrt{۱۵}$$

توجه: می توان به شکل ساده زیر هم عمل نمود

$$۲y = x^۲ \Rightarrow x = \sqrt{۲y}$$
$$\sqrt{۲y} = \sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳}$$

با دقت در معادله فوق مشاهده می شود که $y = ۳$ در معادله صادق است. بنابراین $x = \sqrt{۶}$

فاصله این نقطه تا مبدا مختصات هم مثل بالا بدست می آید.

۱۰- اگر $\frac{۳^{x}+۳^{x+۱}+۳^{x+۲}+۳^{x+۳}+۳^{x+۴}+۳^{x+۵}}{۲^{x-۲}+۲^{x-۱}+۲^{x}+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}+۲^{x+۳}}=۵۲$ **باشد، مقدار x کدام است؟**

۱) ۱　　　۲) ۲　　　۳) ۳　　　۴) ۴

پاسخ :

گزینه ۲

$$\frac{۳^{x}\left(۱+۳^{۱}+۳^{۲}+۳^{۳}+۳^{۴}+۳^{۵}\right)}{۲^{x}\left(۲^{-۲}+۲^{-۱}+۱+۲^{۱}+۲^{۲}+۲^{۳}\right)}=۵۲$$

$$\left(\frac{۳}{۲}\right)^{x}\frac{۳۶۴}{\frac{۶۳}{۴}}=۵۲ \Rightarrow \left(\frac{۳}{۲}\right)^{x}=\frac{۹}{۴} \Rightarrow x=۲$$

۱۱- نمودار تابع $y=۲^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{۳}{۲}$ در امتداد محور y ها در جهت منفی انتقال می دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصله $[۰,\pi]$، کدام است؟

۱) صفر　　　۲) ۱　　　۳) ۲　　　۴) ۴

پاسخ:

گزینه ۳

انتقال به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ در جهت مثبت محور x ها:

$$x \to x-\frac{\pi}{۲}$$

انتقال به اندازه $\frac{۳}{۲}$ در جهت منفی محور y ها:

$$y \to y+\frac{۳}{۲}$$

$$y+\frac{۳}{۲}=۲^{\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)\right|}$$ **و** $y=۰$ **تقاطع**

$$۲^{\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)\right|}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲^{|\cos x|}=\frac{۳}{۲}$$

روش اول:

از طرفین $\log$ می گیریم:

$$\log ۲^{|\cos x|}=\log\frac{۳}{۲} \Rightarrow |\cos x|\log ۲=\log\frac{۳}{۲}$$

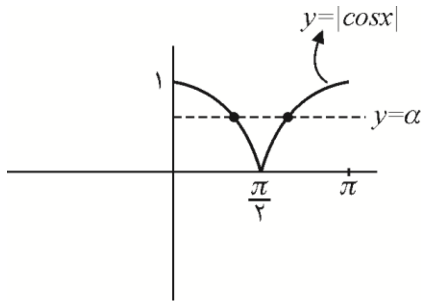
$$|\cos x|=\frac{\log\frac{۳}{۲}}{\log ۲}=\log_{۲}\frac{۳}{۲}\approx ۰/۵$$

در بازه $[۰,\pi]$ دو جواب وجود دارد.

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲^{۰}=۱<۱/۵ \\ ۲^{۱}=۲>۱/۵ \end{array}\right. \Rightarrow \quad ۰<|\cos x|<۱$$

می توانیم فرض کنیم که $|\cos x|$ عددی مثل α است که $۰<\alpha<۱$ است بنابراین مانند روش اول دارای دو جواب است.



۱۲- اگر تساوی $\log_x y-۲\log_y x=۱$ به ازای $x,y>۱$ برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟

۱) $y=x^{۲}$ ۲) $y=x^{۳}$ ۳) $y=\sqrt{x}$ ۴) $xy=۲$

پاسخ:

گزینه ۱

$\log_y x$ و $\log_x y$ معکوس هم هستند.

فرض: $\log_x y=t$

با جاگذاری در معادله داده شده:

$$t-\frac{۲}{t}=۱ \Rightarrow t^{۲}-t-۲=۰ \Rightarrow t=-۱,۲$$

$$\log_x y=-۱,۲ \Rightarrow y=x^{-۱},x^{۲}$$

۱۳- مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x}}-\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{x^{۲}+۱}}\right)$ ، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ:

گزینه ۴

$\sqrt{x}$ را به عبارت سمت راستش ضرب می کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x+۱}+۱}-\sqrt{\frac{۱}{x}-\frac{x}{x^{۲}+۱}}=\sqrt{۱+۱}-\sqrt{۰-۰}=\sqrt{۲}$$

۱۴- مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}^{-}}[۲\sin x-۱]$ ، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

پاسخ:

گـزینه ۱

$\sin x$ در فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ صعودی است بنابراین:

$$x \to \frac{\pi}{6}^- \quad : \quad \sin x = \frac{1}{2}^-$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}^-} [2\sin x - 1] = \left[2 \times \frac{1}{2}^- - 1\right] = \left[0^-\right] = -1$$

۱۵- قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می دهیم و آن را $y = g(x)$ می نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) ۴-

پاسخ:

گـزینه ۴

قرینه نمودار نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم (خط $y = x$) : وارون نمودار

بنابراین جای x و y را عوض می کنیم یا می توانیم x را برحسب y بدست آوریم:

$$y - 2 = \sqrt{x-1} \quad \Rightarrow \quad x = (y-2)^2 + 1 \qquad (y - 2 \ge 0)$$

$$f^{-1}(x) = g(x) = (x-2)^2 + 1 \qquad (x \ge 2)$$

انتقال ۲ واحد در جهت مثبت xها: $x \to x - 2$

انتقال ۳ واحد در جهت منفی yها: $y \to x + 3$

$$g(x) + 3 = \left[(x-2) - 2\right]^2 + 1$$

$$g(x) = (x-4)^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad g(4) = (4-4)^2 - 2 = -2$$

توجه: می توان به شکل ساده زیر هم عمل نمود

$$g(x) = f^{-1}(x-2) - 3 \quad \Rightarrow \quad g(4) = f^{-1}(2) - 3$$

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow 2 = 2 + \sqrt{f^{-1}(2) - 1} \Rightarrow f^{-1}(2) = 1$$

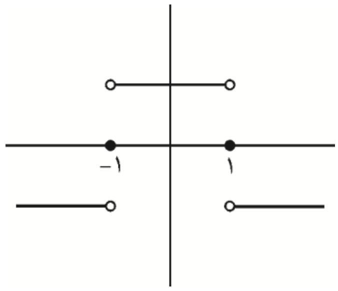
$$g(4) = 1 - 3 = -2$$

۱۶- فرض کنید $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ و $f(x) = 1 - x^2$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع gof، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ:

گزینه ۳



$$g\left(f\left(x\right)\right)=\begin{cases}1 & 1-x^2>0\\ 0 & 1-x^2=0\\ -1 & 1-x^2<0\end{cases}$$

نقاط ناپیوستگی: ۱ و ۱-

۱۷- تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f\left(x\right)=\frac{x^2}{x^2-1}\left|x^2-4\right|$، کدام است؟

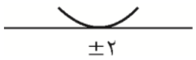
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ:

گزینه ۲

ریشه های داخل قدر مطلق: $x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2$

مینیمم نسبی



f (اطراف ± 2) $>0 \quad \Rightarrow$

$f\left(0\right)=0$

ماکزیمم

f (اطراف 0) $<0 \quad \Rightarrow$

$$y=\pm\frac{x^2\left(x^2-4\right)}{x^2-1}=\pm\frac{x^4-4x^2}{x^2-1}=x^2-3-\frac{3}{x^2-1}$$

$$y'=2x+\frac{3\left(2x\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=x\left(2+\frac{3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

۱۸- قرینه نقطه A واقع بر سهمی $f\left(x\right)=x^2$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم صفحه مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطه A بین دو طول متوالی از محل بر تقاطع تابع f با خط نیمساز مورد نظر باشد، ماکزیمم طول پاره خط AA'، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

پاسخ:

گزینه ۳

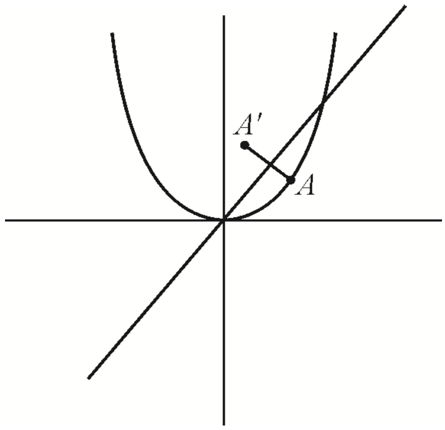
$\max AA' = ۲$ (فاصله A تا خط)

مختصات نقطه A : $(x,x^۲)$ خط : $y=x$

$$AA' = ۲\frac{|x^۲-x|}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}\,|x^۲-x|$$

$$y'=۰ \quad\Rightarrow\quad ۲x-۱=۰ \quad\Rightarrow\quad x=\frac{۱}{۲}$$

$$\max AA' = \sqrt{۲}\left|\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}\right| = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$



۱۹- فرض کنید $f(x)=\left(x\left[x^۲+\frac{۱}{۲}\right]\right)^۲+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x=\frac{۳}{\sqrt{۸}}$، چند برابر $\left(-۱۲۸\sqrt{۲}\right)$ است؟

۱) -۴ ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۴

پاسخ:

گزینه ۴

$$\left(fog(x)\right)' = g'(x)f'\left(g(x)\right)$$

$$x=\frac{۳}{\sqrt{۸}} \quad\Rightarrow\quad g\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}}=۲$$

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}} \quad\Rightarrow\quad g'(x)=-\frac{۱}{۳}(۲x)\left(x^۲-۱\right)^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right)=-\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{\sqrt{۲}}\times\left(\frac{۱}{۸}\right)^{-\frac{۴}{۳}}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times ۲^۴=-۸\sqrt{۲}$$

$$f'(x)=\left[(۴x)^۲+۱\right]'=۳۲x$$

$$\left(fog\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right)\right)=-۸\sqrt{۲}\times ۳۲\times ۲=۴\left(-۱۲۸\sqrt{۲}\right)$$

۲۰- فرض کنید $g(x)=ax^۲+bx+c$، $(a\neq ۰)$ و $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq k \\ g'(x) & x<k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b+c=a$، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ:

گزینه ۳

توجه داشته باشید برای مشتق پذیر بودن یک تابع دو ضابطه ای در نقطه مرزی، یک بار مقدار تابع را برای دو ضابطه در این نقطه برابر قرار می دهیم و یک بار هم مشتق در این نقطه را

$1)\ \ ak^2+bk+c=2ak+b$

$2)\ 2ak+b=2a$

$$(1)\ \Rightarrow\ ak^2+bk+a-b=2ak+b$$

$$ak^2+bk+a=2ak+2b$$

$$(2)\ \Rightarrow\ b=2a-2ak$$

$$ak^2+2ak-2ak^2+a=2ak+4a-4ak$$

a ها از طرفین حذف می شوند:

$$k^2+2k-2k^2+1=2k+4-4k$$

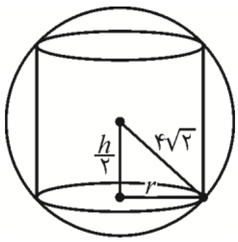
$$k^2-4k+3=0\quad\Rightarrow\quad k=1,3$$

۲۱- حداکثر مساحت جانبی استوانه ای که درون یک کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط می شود، کدام است؟

۱) 32π ۲) 64π ۳) $\frac{256\pi}{3}$ ۴) $\frac{512\pi}{3}$

پاسخ:

گزینه ۲



$$\frac{h^2}{4}+r^2=32\quad,\quad S=2\pi rh$$

حاصلضرب دو عبارت که مجموعشان ثابت است موقعی حداکثر است که باهم برابر باشند:

$$\frac{h^2}{4}=r^2=16\quad\Rightarrow\quad h=8\ ,\ r=4$$

$$s=2\pi\times4\times8=64\pi$$

می توانستیم از مشتق هم استفاده کنیم ولی حل طولانی تر می شد.

۲۲- احتمال اینکه یک دانش آموز در یک امتحان نمره قبولی بگیرد ۰/۹ و در دو امتحان متوالی نمره قبولی بگیرد ۰/۸۵ است. اگر دانش آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال اینکه امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{85}{94}$ ۳) $\frac{17}{18}$ ۴) $\frac{45}{47}$

پاسخ:

گزینه ۳

A: امتحان اول   B: امتحان دوم

$$P(A)=P(B)=۰/۹$$

$$P(A\cap B)=۰/۸۵$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۸۵}{۰/۹}=\frac{۱۷}{۱۸}$$

۲۳- فرض کنید $a,b,c\in\{۱,۲,...,۹\}$. چند معادله درجه دوم به صورت $ax^۲+bx-c=۰$ می توان تشکیل داد، به طوری که مجموع ریشه های هر معادله از حاصل ضرب ریشه های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟

۱) ۱۴   ۲) ۱۵   ۳) ۱۶   ۴) ۱۸

پاسخ:

گزینه ۳

$$ax^۲+bx-c=۰$$

$\Delta=b^۲+۴ac>۰$ **همواره برقرار است.**

$$S=P+۲ \Rightarrow -\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}+۲ \Rightarrow c=۲a+b$$

$a=۱ \quad : \quad c=۲+b \quad : \quad b=۱,۲,...,۷$

اگر $b>۷$ شود $c>۹$ می شود و قابل قبول نیست.

$a=۲ \quad : \quad c=۴+b \quad : \quad b=۱,۲,...,۵$

$a=۳ \quad : \quad c=۶+b \quad : \quad b=۱,۲,۳$

$a=۴ \quad : \quad c=۸+b \quad : \quad b=۱$

تعداد معادلات ممکن $=۷+۵+۳+۱=۱۶$

۲۴- در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش آموز کلاس پایه یازدهم و ۴ دانش آموز کلاس پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش آموزان در صندلی ها بنشینند، به طوری که در کنار هر دانش آموزی، دانش آموز هم پایه قرار نگیرد؟

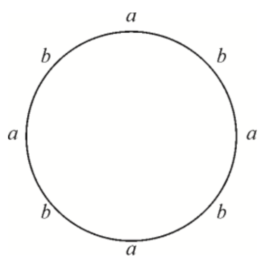
۱) ۱۴۴   ۲) ۲۸۸   ۳) ۲۷۶   ۴) ۱۱۵۲

پاسخ:

گزینه ۱

a: دانش آموزان پایه یازدهم

b: دانش آموزان پایه دوازدهم



$a_۱$: **هر جا خواست** $\Rightarrow$ **یک حالت**

$a_۲$: **سه حالت**

$a_۳$: **دو حالت**

$a_۴$: **یک حالت**

b ها هر طوری دوست داشته باشند می نشینند: $۴!$

تعداد حالت ها: $(۳\times۲\times۱)\times۴!=۱۴۴$

۲۵- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیر مجموعه ای از اعداد طبیعی می سازیم، که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعه فوق انتخاب می کنیم. احتمال اینکه عضو انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ:

گزینه –

یک رقمی	دو رقمی
۱	۱۲
۲	۳۲
۳	۲۴
۴	
۵	۵۲
احتمال: $\frac{۱}{۵}$	احتمال: $\frac{۴}{۴\times۵}=\frac{۱}{۵}$

به همین ترتیب برای اعداد سه رقمی:

احتمال: $\frac{۳\times۴}{۳\times۴\times۵}=\frac{۱}{۵}$

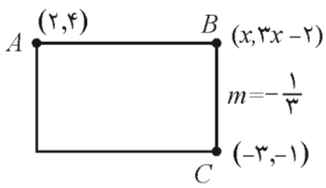
در تمام حالت ها $\frac{۱}{۵}$ می شود.

۲۶- شیب نیم خطی با نقطه شروع $A(۲,۴)$ برابر ۳ است. مستطیل ABCD را چنان می سازیم، که نقطه B روی نیم خط فوق و رأس سوم آن $C(-۳,-۱)$ باشد. محیط مستطیل، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) $۶\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۱۰}$

پاسخ:

گزینه ۳



AB معادله: $y-۴=۳(x-۲) \Rightarrow y=۳x-۲$

BC شیب: $=-\frac{۱}{۳}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{(۳x-۲)-(-۱)}{x-(-۳)}=\frac{۳x-۱}{x+۳} \Rightarrow x=۰$

B مختصات: $(۰,-۲)$

$$\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(4+2)^2}=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(0+3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

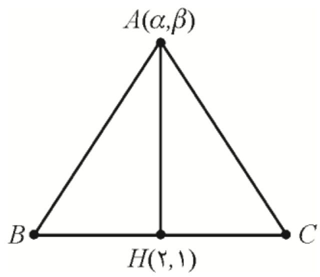
$$p=2\left(2\sqrt{10}+\sqrt{10}\right)=6\sqrt{10}$$

۲۷- نقطه $H(2,1)$ را روی خط $3x-y=5$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می سازیم، به طوری که محیط مثلث $\sqrt{270}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A، کدام است؟

۱) $\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$ ۲) $\left(\frac{13}{2},-\frac{1}{2}\right)$ ۳) $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ ۴) $\left(-\frac{1}{2},\frac{11}{6}\right)$

پاسخ:

گزینه ۲



طول ضلع: $a=\frac{1}{3}\times\sqrt{270}=\sqrt{30}$

ارتفاع: $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{30}=\frac{\sqrt{90}}{2}$

$$\overline{AH}=h=\frac{\sqrt{90}}{2}=\sqrt{(\alpha-2)^2-(\beta-1)^2}\Rightarrow(\alpha-2)^2-(\beta-1)^2=\frac{90}{4}$$

با امتحان کردن گزینه ها مشخص می شود که گزینه ۲ صحیح است.

۲۸- دایره های $x^2+y^2+2y=3$ و $x^2+y^2+2x=3$ متقاطع اند. معادله وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

۱) $x=y$ ۲) $x=1+y$ ۳) $x=-y$ ۴) $x=1-y$

پاسخ:

گزینه ۱

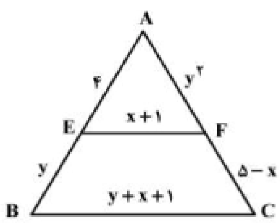
برای تعیین معادله وتر دو دایره متقاطع، دو دایره را قطع می دهیم.

$$-\begin{cases}x^2+y^2+2y-3=0\\x^2+y^2+2x-3=0\end{cases}$$

$$2y-2x=0 \quad\Rightarrow\quad y=x$$

دو نقطه تقاطع روی خط $y=x$ قرار دارند.

۲۹- در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y-2x$، کدام است؟



۱) -4

۲) -2

۳) 2

۴) 4

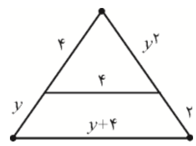
پاسخ:

گـزینه ۱

از تشابه مثلث ها داریم:

$$\frac{۴}{y+۴}=\frac{x+۱}{y+x+۱}$$

با تفضیل در مخرج:

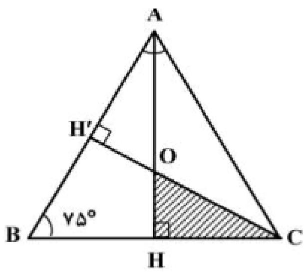


$$\frac{۴}{y}=\frac{x+۱}{y}$$

$$\Rightarrow\quad x+۱=۴\quad\Rightarrow\quad x=۳$$

$$\frac{۴}{y}=\frac{y^۲}{۲}\quad\Rightarrow\quad y^۳=۸\quad\Rightarrow\quad y=۲\ \Rightarrow y-۲x=۲-۲\times۳=-۴$$

۳۰- در شکل زیر مثلث ABC متساوی الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC، کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

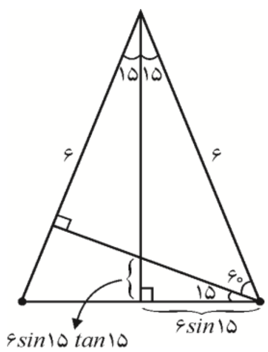
۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۱۸}{۷+۴\sqrt{۳}}$

۴) $\frac{۹}{۷+۴\sqrt{۳}}$

پاسخ:

گـزینه –



$$S=\frac{۱}{۲}(۶\sin۱۵)(۶\sin۱۵\tan۱۵)=۱۸\sin^۲۱۵\tan۱۵$$

$$=۹(۱-\cos۳۰)\tan۱۵=۹\left(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\left(۲-\sqrt{۳}\right)$$

$$=۹\left(۲-\sqrt{۳}\right)^۲=\frac{۹}{۲}\left(۷-۴\sqrt{۳}\right)=\frac{۹}{۲}\left(۷-۴\sqrt{۳}\right)\times\frac{۷+۴\sqrt{۳}}{۷+۴\sqrt{۳}}=\frac{۹}{۲\left(۷+۴\sqrt{۳}\right)}$$